# Een oceaan vol plastic
# Stromingen wiskundig modelleren
## Leerkrachtenversie

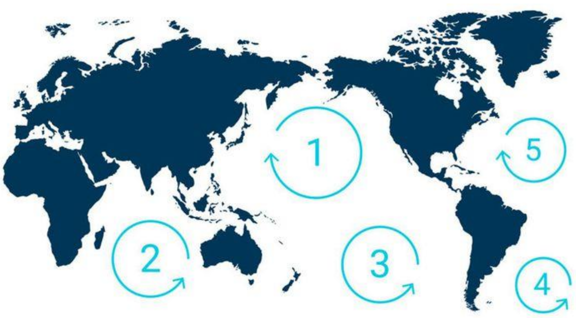
*Plastic is een product dat niet weg te denken is uit ons leven. Het is een stof met zeer veel toepassingen waardoor men het ook vaak als wegwerpproduct gebruikt. Via volgende proeven willen we leerlingen laten kennismaken met de eigenschappen van plastic of met de milieuproblemen hieraan gelinkt. Als leerkracht kan je een bepaalde invalshoek kiezen (biologie, chemie, fysica, aardrijkskunde, wiskunde) om dit onderwerp te bespreken. De proeven staan dus los van elkaar.*
*Deze opdracht kan je ook gebruiken om oceaanstromingen toe te lichten. Voor oceaanstromingen verwijzen we ook naar het pakket 'oceaancirculatie'.*

OPDRACHT: Wiskunde: Stromingen wiskundig modelleren

## Achtergrondinformatie

Waarschijnlijk ken je Boyan Slat wel (figuur 1), de jonge Nederlandse uitvinder die met zijn project The Ocean Cleanup 90% van het drijvend plastic in de oceaan wil opruimen. Zijn systeem bestaat uit 1 tot 2 kilometer lange drijvende buizen waaronder netten hangen. Misschien vraag je je wel af waar hij die installaties in de oceaan plaatst? Op een willekeurige plaats? Vast niet!


*Figuur 1: Boyan Slat. © The Ocean Cleanup.*



*Figuur 2: Het afval verzamelt zich in vijf gyres onder invloed van de oceaanstromingen (©The Ocean Cleanup).*

Drijvend plastic in zee concentreert zich eerst en vooral langs de kust, aan riviermondingen, op stranden en in havens. Maar (plastic) afval verspreidt zich ook door zeestromingen over de oceaan. Globaal gezien zijn er vijf 'gyres' of megawervels, ringvormige oppervlaktestromingen die het afval samenbrengen tot zogenaamde 'plastic eilanden' (figuur 2). Dit zijn geen eilanden waar je kunt op lopen maar regio's met een relatief hoge dichtheid aan plastic afval. En net op die strategische plaatsen, zoals in de Great Ocean Garbage Patch (het grootste plasticeiland tussen Hawaii en Californië) wordt het systeem van buizen en netten in de oceaan gelegd.

Dat systeem is enerzijds flexibel zodat het de golven kan volgen en anderzijds voldoende stijf om een U-vorm te behouden. De zeestromingen zelf brengen afval in de netten. Een cargoschip voert het vervolgens af (figuur 3).

*Figuur 3. The Ocean Cleanup: systeem met drijvende buizen waaronder netten hangen.*

In deze opdracht onderzoeken jullie hoe we stromingen wiskundig kunnen modelleren en hoe deze modellen kunnen voorspellen waar het plastic afval zich zal opstapelen.

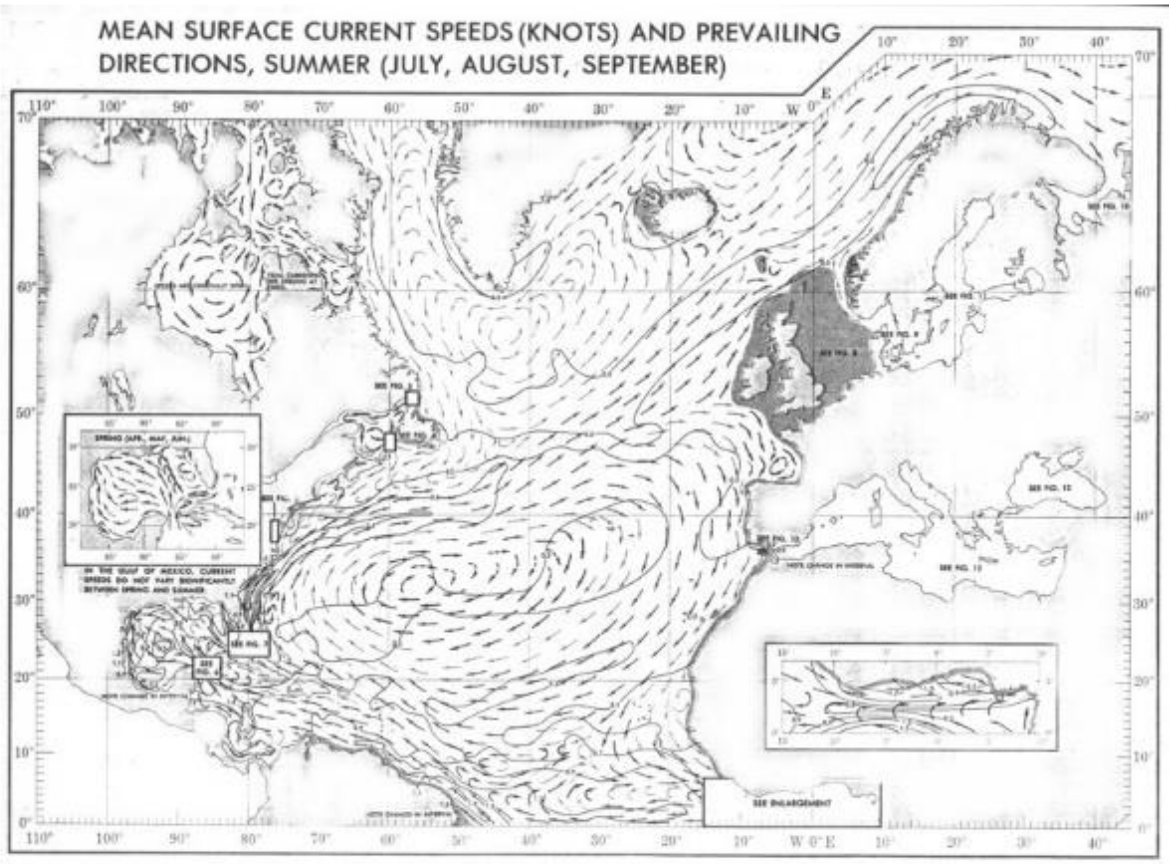
**Video's:**
- The first Plastic. Cleaning Oceans. The Ocean Cleanup.
www.youtube.com/watch?v=FNk7wO9DUeM&list=PLqMMUWV_CQn0o-lMkfbr-MW451En_-RF5&index=3

Tijdsduur: minstens 4 lesuren
Niveau: 5e en 6e middelbaar
Vereiste voorkennis: vierkantsvergelijkingen, tekenen in een assenstelsel

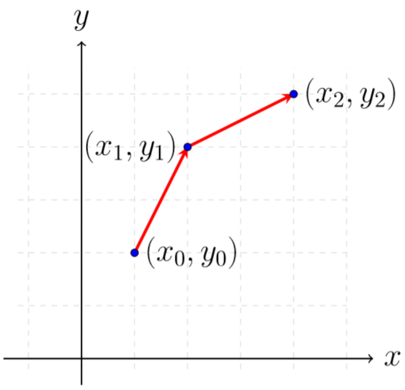
**Klasdiscussie:**
Waarschijnlijk kennen jullie Boyan Slat wel, de jonge Nederlandse uitvinder die met zijn project The Ocean Cleanup 90 % van het drijvend plastic in de oceaan wil opruimen. Zijn systeem bestaat uit 1 tot 2 kilometer lange drijvende buizen waaronder netten hangen.
Misschien vraag je je wel af waar hij die installaties in de oceaan plaatst? Op een willekeurige plaats? Vast niet! Denk hierover na in groepjes.

*Eventueel met wat input van de leerkracht moeten leerlingen uitkomen bij oceaanstromingen die het plastic naar een bepaalde regio laten drijven. Een stuk van dit filmpje kan getoond worden over The Ocean Cleanup.*
*Vervolgens kan je toelichten dat stromingen wiskundig kunnen gemodelleerd worden en dat modellen kunnen voorspellen waar het plastic afval zich zal opstapelen.*

**Materiaal:**
Stromingskaart van het Noordelijk deel van de Atlantische Oceaan.
Pijltjes duiden de stromingen aan (richting en snelheid). Hoe langer de pijl, hoe sterker de stroming.
*Er zijn regio's waar het water snel in een richting stroomt (zoals tussen het Verenigd Koninkrijk en IJsland) en regio's waar het water rond een bepaald punt blijft draaien. Daar stapelt plastic afval zich op.*
*Let wel, stromingen hangen af van seizoenen, wind, zoutgehalte, … Voor deze opdracht is het onmogelijk al deze factoren in rekening te brengen. Daarom zullen we een vereenvoudigd model gebruiken.*



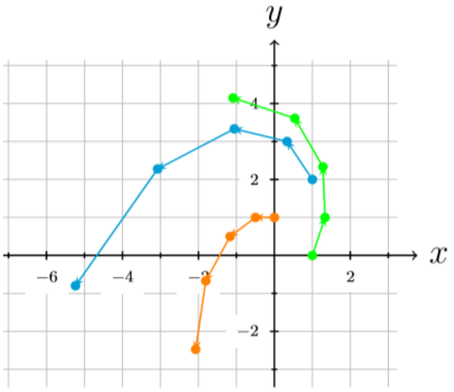
**Procedure:**
Allereerst moet je een **stromingskaart leren interpreteren**. Wat betekent een pijl op een stromingskaart eigenlijk? Als een pijl start in een punt ($x_0$, $y_0$) (van het oceaanvlak, uitgerust met een orthonormale basis) en eindigt in punt ($x_1$, $y_1$), betekent dit dat een plasticdeeltje dat zich op een zeker tijdstip in het punt ($x_0$, $y_0$) bevindt, zich 1 tijdseenheid later (bijvoorbeeld een uur later) in het punt ($x_1$, $y_1$) zal bevinden. Als we dan de stroming in ($x_1$, $y_1$) kennen, weten we waar het plasticdeeltje zich tijdens de volgende tijdseenheid naartoe zal verplaatsen. Dat zal een punt ($x_2$, $y_2$) opleveren.




In het model dat we hier beschouwen, veronderstellen we dat de stroming in elk punt van het vlak gekend is en dat we van elk plasticdeeltje via een **stelsel van lineaire vergelijkingen** kunnen zeggen waar het zich na 1 tijdseenheid zal bevinden, in functie van de beginplaats ($x_n$, $y_n$) van het deeltje. We noteren de nieuwe plaats van het deeltje ($x_{n+1}$, $y_{n+1}$). Bijvoorbeeld:

$$(M)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

Door het stelsel (M) meerdere malen toe te passen, kunnen we de evolutie of de **baan van een plasticdeeltje bepalen**. Veronderstel bijvoorbeeld dat een deeltje zich in beginpositie ($x_0$, $y_0$) = (1, 2) bevindt. Dan zal het zich na 1 tijdseenheid in het punt ($x_1$, $y_1$) = $(\frac{1}{3}, 3)$ bevinden. Nog een tijdseenheid later in ($x_2$, $y_2$) = $\left(\frac{-19}{18}, \frac{10}{3}\right)$. De baan (over vier tijdseenheden) van het punt (1, 2) is op onderstaande figuur in het blauw afgebeeld. In het groen en het oranje zijn banen afgebeeld voor twee andere punten. Het is duidelijk dat het model (M) plasticdeeltjes in een spiraalbeweging van de oorsprong wegstuurt.




Nu jullie de basis begrijpen, gaan we over tot het echte werk: drie verschillende opdrachten die aan elkaar gelinkt zijn.

*In de eerste opdracht werken leerlingen met stelsels van lineaire vergelijkingen en tekenen ze punten uit in een assenstelsel. Bij de tweede opdracht creëren ze specifieke getallen die uniek zijn aan een model (deze noemen we $f_1$ en $f_2$). Tenslotte gaan ze die unieke getallen linken aan een classificatie waarin het gedrag van plasticdeeltjes voorspeld wordt. Dit laat toe om voorspellingen te doen over plasticdeeltjes.*

**Opdracht 1:**

Gegeven zijn de modellen ($M_1$) t.e.m. ($M_4$). Bepaal de banen van enkele punten (minstens 5 verschillende punten, hoogstens 2 per kwadrant, minstens 5 iteraties). Stel ze grafisch voor. Vergelijk de vier modellen en noteer je vaststellingen. Wat gebeurt er met de plasticdeeltjes?

*De leerlingen kunnen groepjes vormen en het rekenwerk verdelen.*

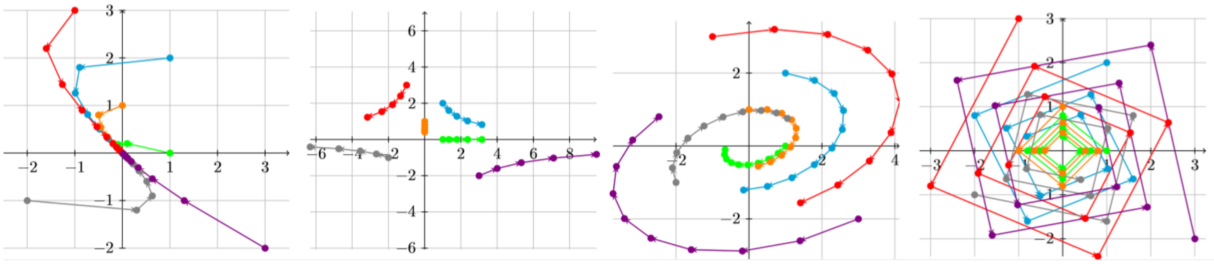
$$(M_1)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{10}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_2)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_3)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n + y_n \end{cases}$$

$$(M_4)\begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n \end{cases}$$

*Oplossing opdracht 1:*

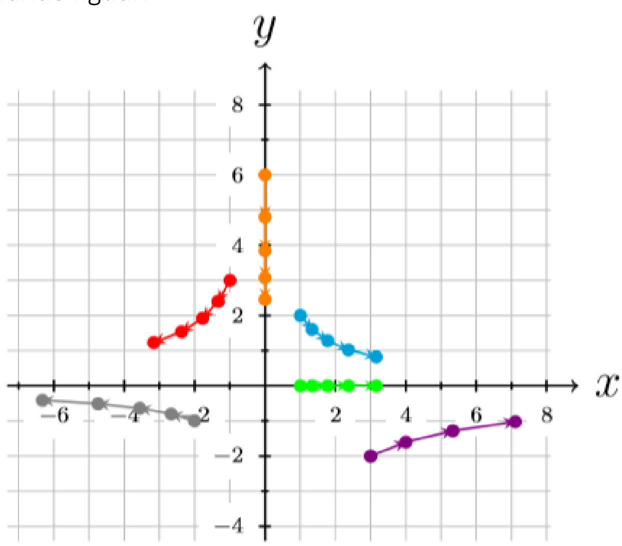


*Van links naar rechts: ($M_1$) t.e.m. ($M_4$).*
*$M_1$: alle punten convergeren naar de oorsprong.*
*$M_2$: de punten op de y-as convergeren naar de oorsprong. Alle andere punten verdwijnen naar (plus of min) oneindig met de x-as als asymptoot.*
*$M_3$: de plasticdeeltjes worden in een spiraalvormige baan naar de oorsprong gestuurd.*
*$M_4$: net als in model M3 verkrijgen we hier spiraalvormige banen naar de oorsprong maar de sprongen zijn groter. De plasticdeeltjes convergeren sneller naar de oorsprong.*

**Opdracht 2:**
We bekijken terug het model:

$$(M_2)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

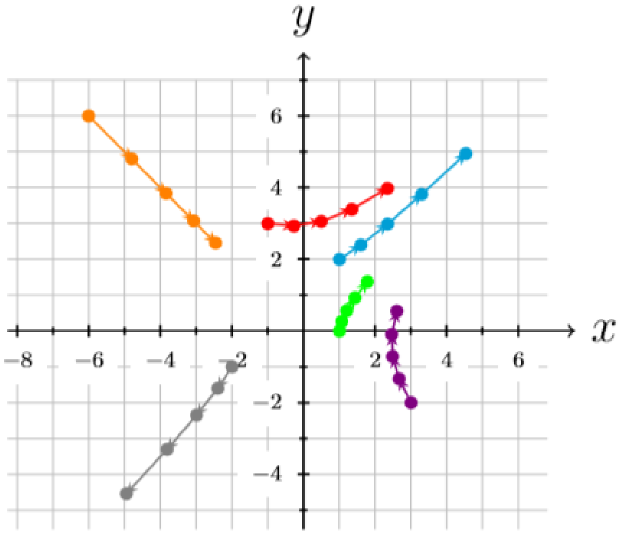
De evolutie van dit model is makkelijk te voorspellen omdat voor elk punt ($x_0$, $y_0$) bij elke tijdseenheid de x-coördinaat vermenigvuldigd wordt met $\frac{4}{3}$ en de y-coördinaat met $\frac{4}{5}$. Of met andere woorden: de x-coördinaat wordt groter (want a > 1) en de y-coördinaat krimpt (want a < 1). Nemen we dus een punt op de y-as, dan zal de baan op de y-as blijven en naar het punt (0, 0) convergeren. Een punt op de x-as (zonder (0, 0)) daarentegen zal verdwijnen naar oneindig. Voor punten die niet op de assen liggen, worden beide effecten gecombineerd en zien we banen volgens hyperbooltakken. Dit zie je op onderstaande figuur.



Het model

$$(M_2')\begin{cases} x_{n+1} = \frac{16}{15}x_n + \frac{4}{15}y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{15}x_n + \frac{16}{15}y_n \end{cases}$$

is hieronder afgebeeld en vertoont gelijkaardige eigenschappen met model ($M_2$) maar de 'assen' liggen anders. We zien dus grafisch gelijkenissen tussen $M_2$ en $M_2'$.




De twee factoren ($\frac{4}{3}$ en $\frac{4}{5}$) die we in ($M_2$) zagen, zijn ook aanwezig in ($M'_2$) maar 'verborgen'. De som van de coëfficiënten van $x_n$ in de eerste vergelijking en $y_n$ in de tweede vergelijking van stelsel ($M_2$) is

$\frac{4}{3} + \frac{4}{5} = \frac{32}{15}$.

Als je hetzelfde doet voor ($M'_2$), vind je merkwaardig genoeg dezelfde som terug:

$\frac{16}{15} + \frac{16}{15} = \frac{32}{15}$.

Het product van de twee factoren, $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, kan je ook terugvinden in de coëfficiënten van ($M'_2$). Daarvoor bereken je eerst het product van de coëfficiënt van $x_n$ in de eerste vergelijking en de coëfficiënt van $y_n$ in de tweede vergelijking en daarvan trek je het product van de twee andere coëfficiënten af: $\frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} - \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{16}{15}$.

In het algemeen vinden we voor een model

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + By_n \\ y_{n+1} = Cx_n + Dy_n \end{cases}$$

A + D is gelijk aan de som van de twee factoren. AD – BC is gelijk aan hun product.

Nu je dit voorbeeld begrijpt, kan je aan de slag met volgende abstracte vraag:
**Per model kan je twee unieke getallen maken: $f_1$ en $f_2$, die volledig vast liggen door hun som en product. Als je de som en het product van twee reële getallen kent, hoe kan je dan deze getallen terugvinden? Leg uit.**

*Oplossing opdracht 2:*
*Gegeven zijn twee reële getallen S en P die respectievelijk de som en het product van twee reële getallen $f_1$ en $f_2$ zijn. Hoe vind je $f_1$ en $f_2$ terug uit S en P? Om dit uit te leggen, kan je ten minste twee verschillende methodes gebruiken (die op hetzelfde neerkomen).*

*Methode 1:*
*Bij het uitwerken van het product $(x - f_1)(x - f_2)$ van veeltermen vinden we $x^2 - (f_1 + f_2)x + f_1f_2$. Dat is natuurlijk de veelterm $x^2 - Sx + P$.*
*We kunnen dus $f_1$ en $f_2$ terugvinden als wortels van de veelterm $x^2 - Sx + P$ of dus door een eenvoudige vierkantsvergelijking op te lossen.*

*Methode 2:*
*We hebben $S = f_1 + f_2$ en $P = f_1f_2$. Als we ervan uitgaan dat $f_2 \neq 0$, kunnen we stellen dat $f_1 = \frac{P}{f_2}$.*
*Substitutie in de vergelijking voor S geeft:*
$S = \frac{P}{f_2} + f_2$.
*Als we beide leden vermenigvuldigen met $f_2$ vinden we een vierkantsvergelijking voor $f_2$:*
$f^2{}_2 - Sf_2 + P = 0$
*Dit is dezelfde vierkantsvergelijking als in methode 1. Merk op dat de andere wortel van de vierkantsvergelijking $f_1$ zal zijn.*
*Hoe kunnen we weten dat $f_2 \neq 0$? Als $P \neq 0$, weten we dat zowel $f_1$ als $f_2$ niet nul is en is er geen probleem. Als $P = 0$ zou het kunnen dat $f_2$ nul is of dat $f_1$ nul is of allebei. Als ze allebei nul zijn, is ook S nul en kunnen we meteen zeggen dat $f_1 = f_2 = 0$. Als de som niet nul is, is $f_1$ of $f_2$ niet nul. In beide gevallen vinden we dezelfde vierkantsvergelijking.*

Nu gaan we opnieuw aan de slag met de modellen om de evolutie ervan te verklaren en zo te voorspellen waar de plasticdeeltjes naartoe zullen drijven.

**Opdracht 3:**
*Tip: geef leerlingen pas deel 2 van deze opdracht wanneer ze deel 1 succesvol hebben afgerond.*

Deel 1. We bekijken opnieuw vier voorgaande modellen:

$$(M_1)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{10}x_n - \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_2)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}y_n \end{cases}$$

$$(M_3)\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n + y_n \end{cases}$$

$$(M_4)\begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = \frac{4}{5}x_n \end{cases}$$

Bereken de factoren van deze vier modellen. We noemen de twee factoren van een gegeven model $f_1$ en $f_2$ en zorgen ervoor dat $f_1 \leq f_2$. Plaats deze vier modellen vervolgens in onderstaande tabel. Bespreek a.d.h.v. de eerder uitgetekende grafische voorstellen (zie opdracht 1) de evolutie van deze modellen.

*De factoren van $M_1$ zijn $f_1 = \frac{3}{10}$ en $f_2 = \frac{6}{10}$.*
*De factoren van $M_2$ zijn $f_1 = \frac{4}{5}$ en $f_2 = \frac{4}{3}$.*
*Voor $M_3$ en $M_4$ zijn er geen reële factoren (wel complexe maar deze laten we hier buiten beschouwing), $f_1$ en $f_2$ bestaan dus niet binnen $\mathbb{R}$. Bij $M_3$ is de discriminant $\frac{-9}{25} < 0$. Bij $M_4$ krijgen we als vergelijking voor de factoren $x^2 + \frac{4}{5} = 0$.*

| $f_1$ en $f_2$ | Evolutie van het model |
|---|---|
| $0 < f_1 \leq f_2 < 1$ | *Dit gaat op voor $M_1$: $0 < \frac{3}{10} \leq \frac{6}{10} < 1$. In dit geval weten we uit opdracht 1 dat alle punten convergeren naar de oorsprong. Wanneer je voor een ander stelsel uitkomt dat $0 < f_1 \leq f_2 < 1$, kan je besluiten dat de plasticdeeltjes naar de oorsprong van het assenstelsel drijven.* |
| $0 < f_1 \leq f_2 = 1$ | |
| $-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$ | |
| $1 < f_1 \leq f_2$ | Gegeven: Alle punten gaan naar oneindig. |
| $f_1 < 1$ en $f_2 > 1$ | *Dit geldt voor $M_2$. De plasticdeeltjes drijven uit elkaar (divergeren).* |
| $f_1$ en $f_2$ bestaan niet (in $\mathbb{R}$) | *Dit gaat op voor $M_3$ en $M_4$. Als $f_1$ en $f_2$ geen reële getallen zijn, zullen de plasticdeeltjes zich in een spiraalvormige baan naar de oorsprong bewegen.* |

Deel 2. Ga nu zelf aan de slag met het maken van een model voor de ontbrekende lijnen in de tabel.

Modellen $M_1$ t.e.m. $M_4$ konden we in drie lijnen van het classificatiesysteem plaatsen. Wanneer je een stelsel krijgt met lineaire vergelijkingen waarvan $f_1$ en $f_2$ aan die bepaalde voorwaarden voldoen, kan je meteen voorspellen hoe de plasticdeeltjes zullen drijven.
We kunnen echter nog niks zeggen over de evolutie van plasticdeeltjes bij stelsels met waarden van $f_1$ en $f_2$ indien $0 < f_1 \leq f_2 = 1$ en indien $-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$. Hiervoor stellen we zelf stelsels op, we stellen dus zelf modellen $M_5$ en $M_6$ op.

*We starten met $0 < f_1 \leq f_2 = 1$:*
*We kiezen voor $f_1$ een willekeurige waarde.*
*$f_1 = 0{,}8$ en $f_2 = 1$ (ligt vast).*

*$S = A + D = 1{,}8$*
*$P = AD - BC = 0{,}8$*

$M_5 \begin{cases} x_{n+1} &= x_n \\ y_{n+1} &= 0{,}8y_n \end{cases}$

*Hieruit blijkt dat elke evolutie voor x vast blijft. y daarentegen wordt steeds kleiner en gaat naar nul. Dat blijkt duidelijk wanneer we een aantal opeenvolgende punten berekenen, startend van het willekeurige punt (1, 2):*
*(1, 2) → (1; 1,6) → (1; 1,28) → (1; 1,024) → (1; 0,8192) → (1; 0,65536)*

*We gaan verder met* $-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$*:*
*Hier kan je als tip meegeven aan de leerlingen om* $f_1$ *en* $f_2$ *tegengesteld te kiezen. Dit zal hen rekenwerk besparen!*
*We kiezen opnieuw twee willekeurige waarden die aan de voorwaarden voldoen.*
$f_1 = -0{,}5$ *en* $f_2 = 0{,}5$.

*S = A + D = 0*
*P = AD – BC = -0,25*

$M_6 \begin{cases} x_{n+1} &= 0{,}5x_n \\ y_{n+1} &= -0{,}5y_n \end{cases}$

*Het is duidelijk dat zowel x als y naar nul gaan. Dit blijkt ook duidelijk wanneer we een aantal opeenvolgende punten berekenen, startend van het willekeurige punt (1, 2):*
*(1, 2) → (0,5; -1) → (0,25; 0,5) → (0,125; -0,25) → (0,0625; 0,125)*

*Dit laat ons toe onderstaande tabel verder aan te vullen:*

| $f_1$ en $f_2$ | Evolutie van het model |
|---|---|
| $0 < f_1 \leq f_2 < 1$ | *Dit gaat op voor* $M_1$: $0 < \frac{3}{10} \leq \frac{6}{10} < 1$. *In dit geval weten we uit opdracht 1 dat alle punten convergeren naar de oorsprong. Wanneer je voor een ander stelsel uitkomt dat* $0 < f_1 \leq f_2 < 1$, *kan je besluiten dat de plasticdeeltjes naar de oorsprong van het assenstelsel drijven.* |
| $0 < f_1 \leq f_2 = 1$ | $M_5$. *Punten convergeren volgens rechte banen naar een rechte, y = 0.* |
| $-1 < f_1 < 0 < f_2 < 1$ | $M_6$. *Alle punten gaan naar de oorsprong maar 'springen' bij elke iteratie over een rechte. (Als leerlingen A positief gekozen hebben, springen de punten over de x-as. Hebben ze a negatief gekozen, dan springen de punten over de y-as.)* |
| $1 < f_1 \leq f_2$ | Gegeven: Alle punten gaan naar oneindig. |
| $f_1 < 1$ en $f_2 > 1$ | *Dit geldt voor* $M_2$. *De plasticdeeltjes drijven uit elkaar (divergeren).* |
| $f_1$ en $f_2$ bestaan niet (in $\mathbb{R}$) | *Dit gaat op voor* $M_3$ *en* $M_4$. *Als* $f_1$ *en* $f_2$ *geen reële getallen zijn, zullen de plasticdeeltjes zich in een spiraalvormige baan naar de oorsprong bewegen.* |

**Reflectie:**
We zagen dat wiskundige modellen toelaten om te voorspellen waar plasticdeeltjes naartoe zullen drijven. Stromingen zijn uiteraard complex en hangen af van seizoenen, wind, zoutgehalte, …
Bij welk van bovenstaande modellen zou het systeem van Boyan Slat werken?

*Het systeem van Boyan Slat wordt ingezet op plaatsen waar het plasticafval samendrijft, zoals in de plasticeilanden waar afval samengedreven wordt door ringvormige oppervlaktestromingen. We kunnen dit koppelen aan modellen* $M_1$*,* $M_3$ *en* $M_4$ *waar de plasticdeeltjes naar de oorsprong van een assenstelsel drijven.*

Bovenstaande opdrachten werden ontwikkeld binnen de 'Wiskunnend Wiske Wedstrijd' en werden in de finale voorgeschoteld aan knappe wiskundekoppen.
Vijfde- en zesdejaars uit het secundair onderwijs kunnen jaarlijks deelnemen. Ze krijgen geen klassieke vraagstukken met gegevens en formules voorgeschoteld, maar uitdagende open vragen. Wie zei dat wiskunde saai was? In een voorronde lost een klas drie opdrachten binnen een bepaalde tijdsduur op. De klassen die de beste resultaten halen, strijden tegen elkaar in een finale op (hoe kon het ook anders) pi-dag aan de VUB.
Prof. Ingrid Daubechies is de bedenker van de wedstrijd en werkt hiervoor samen met prof. Ann Dooms en dr. Pattie Maes.
Lees meer: https://www.vub.be/events/wiskunnend-wiske

Deze opdracht werd verder uitgeschreven met de hulp van wiskundeleerkrachten Karel Van Parys en Liselot Bouserie (Sint-Lodewijkscollege, Brugge).